

**EXERCICE 1**Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 2}{x+3}$$

1°/ Déterminer D l'ensemble de définition de f .2°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$ et

donner une interprétation graphique du résultat.

3°/ Vérifier que : $(\forall x \in D) f(x) = 2x + 1 - \frac{5}{x+3}$ 4°/ Mq la droite $(\Delta): y = 2x + 1$ est asymptote à (\mathcal{C}_f) au voisinage de $(-\infty)$ et $(+\infty)$.**EXERCICE 2****I** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 9 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 6)$$

1°/ Calculer u_1 et u_2 2°/ Notons : $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n = u_n - 18$ 2-a) Vérifier que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique,
Calculer w_0 et w_n en fonction de n .2-b) Déterminer u_n en fonction de n .2-c) Calculer $\lim u_n$.**II** Calculer les limites :

$$\textcircled{1} \lim (0,3)^n \quad \textcircled{2} \lim \left(\frac{5}{4}\right)^n; \quad \textcircled{3} \lim \frac{7^{n+2}}{9^{n+4}}$$

$$\textcircled{4} \lim \frac{8n^3 - n}{n + 5n^3} \quad \textcircled{5} \lim \frac{3^n + 2^n}{3^n + 4^n}$$

— * fin * —

EXERCICE 1 :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 2}{x + 3}$$

1°/ $D = \{x \in \mathbb{R} ; x + 3 \neq 0\}$

on a : $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

donc : $D = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

2°/ Tableau de signe de $(x + 3)$:

donc :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+

$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

$= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 7x - 2}{x + 3} = \frac{-5}{0^-} = \boxed{+\infty}$

(car : $2(-3)^2 + 7(-3) - 2 = 2 \times 9 - 21 - 2 = -5$)

$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \frac{-5}{0^+} = \boxed{-\infty}$

interprétation : (\mathcal{E}_f) admet une asymptote
verticale d'équation : $x = -3$.

3°/ Soit $x \in D$. on a :

$2x + 1 - \frac{5}{x + 3} = \frac{(2x + 1)(x + 3) - 5}{(x + 3)}$

$= \frac{2x^2 + 6x + x + 3 - 5}{x + 3} = \frac{2x^2 + 7x - 2}{x + 3} = f(x)$

4° on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y$

2

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 - \frac{5}{x+3} - (2x+1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x+3} = \boxed{0}$$

de même on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x+3} = \boxed{0}$

Conclusion : (E_f) admet une asymptote oblique
 $(\Delta) : y = 2x + 1$ au voisinage de $(+\infty)$ et $(-\infty)$

EXERCICE 2 :

I $u_0 = 9$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 6)$

1° $u_{0+1} = \frac{2}{3}(u_0 + 6) = \frac{2}{3} \times (9 + 6) = \frac{2 \times 15}{3}$

donc :

$$\boxed{u_1 = 10}$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{2}{3}(u_1 + 6) = \frac{2}{3}(10 + 6) = \frac{2 \times 16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

2° $(\forall n \in \mathbb{N}), w_n = u_n - 12$.

2° a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6) - 12 = \frac{2}{3}(u_n + 6) - \frac{12 \times 3}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6) - \frac{2 \times 18}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6 - 18) = \frac{2}{3}(\underbrace{u_n - 12}_{w_n}) = \frac{2}{3} w_n$$

donc (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

$$w_n = u_n - 12 \Rightarrow w_0 = u_0 - 12 = 9 - 12$$

donc : $w_0 = -3$

w_n en fonction de n :

on sait que : $w_n = q^{n-k} w_k$ (car (w_n) est géométrique) donc :

$$w_n = q^{n-0} w_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (-3)$$

donc : $w_n = (-3) \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2-b) on a : $w_n = u_n - 12 \Leftrightarrow w_n + 12 = u_n$

donc : $u_n = (-3) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 12$

2-c) on a : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc : $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

donc : $\lim u_n = \lim -3 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 12 = -3 \times 0 + 12 = 12$

II ① $\lim (0,3)^n = 0$ (car $-1 < 0,3 < 1$)

② $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^n = 0$ car $\frac{5}{4} > 1$

③ $\lim \frac{7^{n+2}}{9^{n+1}} = \lim \frac{7^n \times 7^2}{9^n \times 9^1} = \lim \left(\frac{7}{9}\right)^n \times \frac{7^2}{9} = 0$

car $-1 < \frac{7}{9} < 1$



$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - n}{n + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(8 - \frac{n}{n^3}\right)}{n^3 \left(\frac{n}{n^3} + 5\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 5} = \frac{8 - 0}{0 + 5} = \boxed{\frac{8}{5}}$$

car : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{4^n}{3^n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

car :

$$\begin{cases} -1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \end{cases}$$

fin